terimleri trigronometrik fonksiyonlar olan yapay aritmetik diziler

Veli AKARSU

1. Giriş

Teorik ve Uygulamak Jeodezide trigonometrik fonksiyonlar çokça kullanılmaktadır. Kestirme hesaplarında sin *a* + sin /? ve cos *cc* + cos *p* biçiminde trigonometrik ifâdelere sıkça rastlanmaktadır. Bu çalışmada yukarıdaki trigonometrik iadeler ile sin *a* + sin *2a*+... +sin. *na* , cosa + cos2ot+...+cosna biçimindeki trigonometrik ifadelerin çarpım haline getirilmeleri aritmetik dizi kavramı ile gerçekleştirilmiştir.

2. Tanımlar

Tanım 1: Tanım kümesi doğal sayılar olan her fonksiyona dizi denir.

Bir dizi verildiği zaman belirli bir n numaralı elemanı tamamen belirlidir. Bu eleman a_n ile gösterilir. a_n 'e dizinin genel terimi denir.

Tanım 2 : V« *eN* için a_{n4i} -a_n = *8* olacak şekilde bir *8* e/? varsa a_n dizisine aritmetik dizi denir, *S* sayısına da bu aritmetik dizinin ortak farkı denir. Bir aritmetik dizinin ardışık terimleri arasındaki fark hep aynı sabit sayıdır.
a ve *8* açı değerleri olmak üzere *a, a* + *8, a* + 2 *5, ..., a* + *(n —1)8* aritmetik dizisini dikkate alalım. Aritmetik dizinin sabit terimi *8* dır.

3. Terimleri Trigonometrik Fonksiyonlar Oku Yapay Aritmetik Diziler

Yukarıdaki aritmetik dizinin her bir elemanı yerine önce sinıış sonra da cosiaas fonksıyonlaım koyarak aşağıda görülen farklı iki aritmetik dizi oluşturalım.

{Un) = ™*a*»™(*a*+*S),* si0(*a* +2*8),...,* sin(*a* +(n-l)*8*),...

bj = CfflS*a* ,£0S(*a* **8*\\ cos(*a* +2*8*),..., cos(*a* +(n-l)*8*),... (1)

(1) dizilerine terimleri trigonometrik fonksiyonlardan oluşan yapay aritmetik diziler denir.
Şimdi bu dizilerin S_a ve S_b toplamlarını oluşturalım.

S_a= *sina +sm(a+8) + si®(a+28)+...+ sia(a+(n-T)8*)
S_b = cos *a* + cos(*a* + *8*) + cos(*a* +*2 8*) +...+ cos(*a* +(n-l) *8*) (2)

S_a ve S_b eşitiikleri'nin her birinin iki tarafi 2 sin — ile çarpılırsa

V"
S_a 2sin — ifadesinin sağ tarafındaki toplamın çarpım halindeki her terimi

S
flr$_n$=2sin — sin(a + U *S)* (3)

ve

S_b *İsin* — ifadesinin sağ tarafındaki toplamın çarpım halindeki her terimi

s
b_n = *2* sin — cos(a + *V S*) (4)

şeklinde ki genel terimleriyle ifade edilebilrler. (3) ve (4) formüllerinde ki *u* = 0(l)n-l dir.

U + V *U_V*
cösU-cosV =-2 sin ---------sin ----------
2 2

U-V ***U + V***
sinU-sınV = 2 sın -------- cos --------- (S)

(3) ve (4) genel ifadelerini (5)'in sol yanındaki ifadeler haline getirelim.

TT • 2L> + 1 - %7 2 u - 1 _
U = *a* + ---------*s* ,V = a+----------*S* (6)

S *2u-l,,* 2u+l$_o$
2 sm— SİĖ(Ö; + *uö)* = cos(a +-------- *d*)- cos (a H ---------*o*)

5 2ü+ 1$_o$ 2u-1
2sm— coś(or + uôj =sin(a+ --------<>)-sin(aH--------- *Ö*) (7)

(7>ifedeleri'nin sağ tarafları u =0, U = 1 , u = 2 ,... , u =n-l değerleri için oluşan ifadeler taraf tarafa toplanırsa, aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

1n- **_** ***8*** ***n-* e** **^**
sin(aH---------*O*)-sin(a - —) = 2eos(aH--------*o*)sln(n —)

5 *2n* -1 $_o$ «-1 ^
cos(a- ----)-cos(aH----------*o*) = 2sin(aH--------*S*)sin(n —) (8)

(8) bağıntıları sırayla 5^ 2sin — ve S_a 2sin — çarpımlarına eşitlenir ve *ju* = aH---------*S* kısaltması

da kullanılarak (1) dizileri'nin $_i$S'$_a$ ve S_b toplamlarının aşağıdaki son şekli elde edilir.

$$S_a = sinfi \frac{sın«\frac{8}{—}ğ}{sin\frac{—}{2}} , S_b=cosju \frac{SİSİH\frac{8}{—}jj}{sin\frac{—}{2}} \tag{9}$$

ju : ilk ve son açı'nın aritmetik ortalamağıdır.

Eğer S_a ve S_b toplamlarını oluşturan her trigonometrik fonksiyon yerine açıların radyan değerleri alınırsa,yani;

sima = a ,tosa = a ,$in(a + Ö)za + 8 ,tos(a + ö)=a + S ,...vbgibi.

$$g_a= \quad a + a + 8+a + 2ö+...+a + (n-î)8$$
$$S*_b= \quad cc + a + 8 + a + 28+...+a + (n-l)8 \tag{10}$$

Ayrıca *8* sonuz küçük ise n* = $\frac{sinn \frac{8}{—} \blacksquare §-}{sın \frac{o}{—} 2}$ ve sin *ju = ju* , cos *u = u* alınırsa,

Sl= ^^{n} » &" i«»* (İD

bağıntıları elde edilir.

Alışılmamış aritmetik dizileri'nin bu ilişkilerinden dolayı,(a_H)ve($\#_B$) trigonometrik dizilerine <u>amaca uygun diziler de denir.</u>

4. Sonuç

$$\text{sin or + sifl(a + } 8)+sin(a + 28)+...+siîk(a +(n-î)S) = n*ju$$
$$\text{cos « + cos(a + } 8) + \text{cos(a + } 28\}+...+\text{cos(a +}(n -1)8) -n* /JL \tag{12}$$

Burada;

$$mA = \frac{\blacksquare / \; 2\_}{sm\frac{—}{2}} \quad \_ \frac{a+a\{n-l)8}{L} \_ \frac{a + a + 8+...+a +(n-1)8}{n}$$

dir.